

AZ IS-LM MODELL DINAMIKÁJÁRÓL PUHA KÖLTSÉGVETÉSI KORLÁT ESETÉN

BESSENYEI ISTVAN

Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar

H-7622 Pécs Rákóczi út 80.

KIVONAT. Dolgozatunkban a bifurkáció és határciklus IS-LM modell keretei között történő előfordulásának néhány lehetséges esetét vizsgáljuk. A téma irodalmában szokásos időbeni késleltetés helyett azonban következtetéseinkre a negatív megtakartási határhajlandóság lehetőségének feltevése révén jutunk. A megtakartási határhajlandóság negativitásának megalapozásához Ramsey modelljét használjuk a puha költségvetési korlát feltevése mellett. Bifurkációs paraméterként választva a kormányzati vásárlás nagyságát megmutatjuk, hogy annak változásával az egyensúlyi helyzet unicitása és stabilitása is kérdésessé válhat. Elméleti eredményeinket néhány szimuláció bemutatásával támasztjuk alá.

1. BEVEZETÉS

Amint a XIX. századi közgazdaságtan legnagyobb hatású eszköze a Marshall-kereszt volt, úgy a XX. századi makroökonómia legáltalánosabban használt apparátusának a Hicks (1937) által bevezetett IS-LM modell bizonyult. Ez a megállapítás annak ellenére helytálló, hogy a század vége felé közeledve elsősorban Lucas (1972) valamint Kydland és Prescott (1982) nyomán a dinamikus sztochasztikus általános egyensúlyi (DSGE) modellek kerültek előtérbe. Bevezetve az utóbbiakba bizonyos ár- és bérmevségeket, a két paradigma közti eltérés nem tűnik áthidalhatatlannak. Bár a két modell típus integrációja még nem fejeződött be, McCallum és Nelson (1999), valamint Bénassy (2007) olyan DSGE modelleket konstruáltak, melyek rendelkeznek az IS-LM rendszer néhány sajátos vonásával.

Ugyanakkor az IS-LM modellek is mindinkább alkalmassá válnak az üzleti ciklusok modellezésére. Fanti és Manfredi (2007), Neamtu-Opris és Chilarescu (2007), vagy Zhou és Li (2008) késleltetett differenciálegyenletek bevezetésével

kimutatták, hogy az egyensúlyi helyzet stabilitási tulajdonságai megváltozhatnak, s a modellben Hopf bifurkáció léphet fel.

Ebben a dolgozatban az időbeni kélsletetés feltevésének mellőzésével jutunk hasonló eredményre. Konstans árszínvonalat feltételezünk, így a nominális és reálnagyságok megkülönböztetése szükségtelen. A hicksi megközelítést követve a pénzkínálatot exogénnek tekintjük, a pénzkereslettel kapcsolatban pedig feltesszük, hogy az a reálkibocsátás növekvő, és a kamatláb csökkenő függvénye. Elfogadjuk azt a föltevést is, mely szerint a kamatláb emelkedése a beruházások visszaesését eredményezi, ám a keynesi alapelvekkel szemben feltételezzük, hogy létezik a nemzeti jövedelemnek egy olyan tartománya, melyben az alapvető lélektani törvény nem érvényes, azaz a jövedelem növekedésével együtt csökken a megtakarítás. E föltevés relevanciáját támasztják alá a magyarországi adatok, melyeket az 1. ábra¹ mutat be.

A következő szakaszban megmutatjuk, miként eredményezhet a puha költségvetési korlát negatív megtakarítási határhajlandóságot. Figyelembe véve, hogy Kornai (1979) és (1997) elsősorban a kormányzat és a vállalatok, nem pedig a háztartások költségvetési korlátjának puha volta mellett érvel, egy olyan modellre van szükségünk, amely nem tesz éles különbséget a háztartások és vállalatok között, ezért gondolatmenetünket Ramsey (1928) cikkének Cass (1965) és Koopmans (1965) által finomított változatára alapozzuk. A harmadik szakaszban az így módosított IS-LM modell stabilitási tulajdonságait vizsgáljuk, nem hagyva figyelmen kívül a kormányzati kiadások nagyságának hatását. A negyedik szakaszban néhány szimulációt mutatunk be, az utolsóban pedig néhány következtetés levonása mellett felhívjuk a figyelmet a további kutatás több lehetséges irányára, valamint a modell felhasználhatóságának korlátaira .

2. NEGATÍV MEGTAKARÍTÁSI HATÁRHAJLANDÓSÁG

Azt vizsgáljuk, miként születnek a megtakarítási döntések egyetlen háztartásban, s ezt fogjuk általánosítani makro szintre. Feltesszük, hogy a fogyasztás, illetve

¹Forrás: <http://english.mnb.hu>

megtakarítás tervezése során a háztartás végtelen időhorizonttal számol. Jelölje c a háztartás fogyasztását, ekkor célfüggvénye:

$$(1) \quad W = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt$$

W a háztartás intertemporális jólétét jelöli, melynek értékét a $c = c(t)$ fogyasztási pálya határozza meg. u a standard mikroökonómiában megszokott hasznossági függvény, melynek értéke a folyó fogyasztás nagyságától függ. A szokásos módon feltesszük, hogy $u' > 0$ és $u'' < 0$. ρ az időpreferencia rátája, és $0 < \rho < 1$.

Feltesszük, hogy a háztartás vagyonát kamatozó követelésekben tartja. A követelések és hitelek után egységesen r kamatot kell fizetni, továbbá a háztartás w nagyságú bérjövödelmet realizál. Jelölje k az összvagyon nagyságát, ekkor a háztartás intertemporális költségvetési korlátja:

$$(2) \quad \dot{k} = rk + w - c.$$

Kemény költségvetési korlát esetén a háztartás kénytelen a fölvelt hiteleket véges időn belül teljes egészében visszafizetni, azaz nem biztosíthat rulírozó hitelek révén önmaga számára jövedelménél magasabb fogyasztást végtelen időhorizonton. Ezek szerint a háztartás vagyonának a nettójelenértéke $t \rightarrow \infty$ esetén nem tarthat negatív nagysághoz. Mivel nem tesszük fel r konstans voltát, az alkalmazandó diszkonttényező: $e^{-\int_0^t r(v)dv}$, így a háztartás vagyonára adott feltételünk az alábbi formában írható fel:

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-\int_0^t r(v)dv} \geq 0.$$

Most a háztartás intertemporális döntési problémája a következő:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt,$$

feltéve, hogy:

$$\dot{k} = rk + w - c, \quad k(0) = \tilde{k} \quad \text{valamint} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-\int_0^t r(v)dv} \geq 0.$$

ahol \tilde{k} a háztartás vagyona a $t = 0$ időpontban.

Mivel a (2) differenciálegyenlet szerint a háztartás fogyasztása révén befolyásolja vagyon nagyságát, c döntési, k pedig állapotváltozó. A problémához tartozó Hamilton függvény:

$$H = e^{-\rho t} u(c) + \lambda (rk + w - c).$$

Az elsőrendű feltételek pedig:

$$(4) \quad \frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t} u'(c) - \lambda = 0,$$

$$(5) \quad -\frac{\partial H}{\partial k} = \dot{\lambda} = -\lambda r,$$

ahol $u'(c)$ a fogyasztás határhaszon függvénye. Mivel a háztartás problémája egy végtelen időhorizontra értelmezett jelenérték-feladat, a transzverzálitási feltétel:

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda k = 0.$$

Feltevéseink szerint a Hamilton függvény a c és k változóiban konkáv, így a (4)-(6) feltételek a fogyasztási pálya optimalitásának szükséges és elegendő feltételei. A (4) egyenletből az is kiderül, hogy λ a folyó fogyasztásból származó határhaszon mindenkor értékének $t = 0$ időpontra diszkontált nagyságaként értelmezhető.

A fogyasztás időbeni alakulásának levezetéséhez alakítsuk át a (4) elsőrendű feltételt: $\lambda = e^{-\rho t} u'(c)$. Mindkét oldalt az idő szerint deriválva: $\dot{\lambda} = \dot{u}'(c) e^{-\rho t} - \rho e^{-\rho t} u'(c) = e^{-\rho t} [\dot{u}'(c) - \rho u'(c)]$, ahol $\dot{u}'(c)$ a fogyasztás határhaszon függvényének idő szerinti deriváltját jelöli. Behelyettesítve az így nyert differenciálegyenletet a (5) elsőrendű feltételbe, kapjuk, hogy $e^{-\rho t} [\dot{u}'(c) - \rho u'(c)] = -\lambda r$. Figyelembe véve továbbá, hogy a (4) összefüggésből $\frac{\lambda}{u'(c)} = e^{-\rho t}$ adódik, iménti egyenletünk a következőképpen írható fel: $\frac{\lambda}{u'(c)} [\dot{u}'(c) - \rho u'(c)] = -\lambda r$. Mindkét oldalt $-\lambda$ -val elosztva:

$$(7) \quad r = \rho - \frac{\dot{u}'(c)}{u'(c)}$$

következik.

Figyelembe véve, hogy $\dot{u}'(c) = \frac{du'(c)}{dt} = u''(c)\dot{c}$, a fogyasztásból származó határhaszon növekedési rátája a következő módon írható fel: $\hat{u}'(c) = \frac{u''(c)\dot{c}}{u'(c)} = \frac{cu''(c)}{u'(c)}\hat{c}$. Mindezek miatt az optimális fogyasztási pálya (7) alatt adott feltétele olyan formában is felírható, melyben a fogyasztás növekedési rátája közvetlenül megjelenik:

$$(8) \quad r = \rho - \frac{cu''(c)}{u'(c)}\hat{c} = \rho + \theta\hat{c},$$

ahol $\theta = -\frac{cu''(c)}{u'(c)}$. Az egyenlet jobb oldalán szereplő második tag továbbra is a háztartás által preferált egyenletes fogyasztási pályától a megtakarítás révén történő eltérés díjaként értelmezhető. E tag most két tényező szorzataként áll elő. A második tényező a fogyasztás növekedési rátája, az első pedig a következő alakban

is felírható: $-\theta = \frac{du'}{u'} : \frac{dc}{c}$. A jobb oldalon szereplő hányados a határhaszon fogyasztás szerint vett rugalmassága. Amennyiben a hasznossági függvény lienáris, azaz nem érvényes a csökkenő határhaszon feltevése, és így a határhaszonfüggvény konstans, e rugalmasság értéke zérus. Másrészt ez a rugalmasság az intertemporális helyettesítés rugalmassága reciprokának -1 -szeresével egyenlő. Ezek szerint $\theta = -\frac{cu''(c)}{u'(c)} = -\frac{du'}{u'} : \frac{dc}{c}$, és minél nagyobb θ értéke, annál erőteljesebben preferálja a háztartás az egyenletes fogyasztási pályát.

Az intertemporális helyettesítés rugalmassága változatlanságát biztosító, hasznossági függvény a $\theta = -\frac{cu''(c)}{u'(c)}$ differenciálegyenlet megoldása révén nyerhető, feltéve, hogy θ konstans. Bevezetve a $g(c) = u'(c)$ jelölést, a megoldandó differenciálegyenlet a következő alakban írható fel: $g'(c) + \frac{\theta}{c}g(c) = 0$. A megoldás során $g(c) = Zc^{-\theta}$ adódik, ahol Z tetszőleges konstans. Célszerű Z értékét egységnyiinek venni. A keresett hasznossági függvény egyszerű integrálással adódik:

$$(9) \quad u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}.$$

Az előzőekben láttuk, hogy $\theta > 0$. A határhaszon csökkenő volta helyett annak állandóságát feltételezve $\theta = 0$, és a (9) hasznossági függvény a határhaszon egységnyi értéke mellett lineáris. Egységnyitől eltérő konstans határhaszon esetén a differenciálegyenlet megoldása során bevezetett Z konstans értéke adja meg u' nagyságát. A (9) hasznossági függvény nincs értelmezve $\theta = 1$ esetre. A L'Hôpital szabály alkalmazásával azonban megmutatható, hogy ha $\theta \rightarrow 1$, akkor hasznossági függvényünk az $\ln c$ függvényhez tart. Ezt biztosítja a számlálóban szereplő -1 -es tag. $\theta > 1$ esetén alacsony c értékekre negatív hasznosság adódik, azonban $\lim_{c \rightarrow \infty} u = \frac{-1}{1 - \theta} > 0$. A továbbiakban feltesszük, hogy $0 < \theta < 1$ teljesül. Amennyiben kockázatnak a háztartás által preferált egyenletes fogyasztási pályától történő eltérést tekintjük, az így nyert hasznossági függvényt állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú (CRRA) hasznossági függvénynek is nevezhetjük.

Behelyettesítve az optimális fogyasztási pálya (8) feltételébe a (9) hasznossági függvényt $u'(c) = c^{-\theta}$ és $u''(c) = -\theta c^{-\theta-1}$ miatt, az $r = \rho + \theta \hat{c}$ differenciálegyenlethez jutunk, amiből a fogyasztás optimális növekedési rátája:

$$(10) \quad \hat{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho),$$

A transzverzálitási feltétel értelmezéséhez célszerű abból a λ változót kiküszöbölni. Ehhez oldjuk meg a (5) elsőrendű feltételben adott $\dot{\lambda} + r\lambda = 0$ differenciálegyenletet. Figyelembe véve, hogy $\dot{r} \neq 0$, $b = \int_0^t r(v)dv$, továbbá a $t = 0$ helyettesítést alkalmazva a Z konstans értékének meghatározása során λ következő függvényéhez jutunk:

$$\lambda = \lambda(t) = \lambda(0)e^{-\int_0^t r(v)dv}.$$

Beírva a λ növekedési pályájára imént kapott függvényt a (6) transzverzálitási feltételbe, majd az egyenletet $u'(c(0))$ -lal elosztva, annak alábbi formáját kapjuk:

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} ke^{-\int_0^t r(v)dv} = 0$$

Figyelembe véve a (3) feltétellel kapcsolatban mondottakat, könnyű felismerni, hogy bal oldalon a vagyon nettójelenértékének végtelenben vett határértéke szerepel. Láttuk, hogy a háztartás végtelen időhorizonton nem finanszírozhat rulírozó hitelek felvétele révén jövedelménél nagyobb fogyasztást, ezért volt szükség a (3) egyenlőtlenség kikötésére. Most az is kiderült, hogy az optimális fogyasztási pályán ennek az egyenlőtlenségnek egyenlőség formájában kell teljesülnie.

A háztartás összes jövedelme: $y = (r + \delta)k + w$, ahol a háztartás egységnyi munkakínálatát feltételezve w a bérrel. A határtermelékenységi összefüggések szerint a kamat és a bérrel a termelési technológiától és a felhalmozott tőkéktől függ: $r = f'(k) - \delta$ és $w = f(k) - k \cdot f'(k)$, amiből $y = f(k)$. Mindezek miatt a (2) összefüggés az alábbi formában írható fel:

$$(12) \quad \dot{k} = f(k) - c - \delta k$$

A kamatlábra felírt $r = f'(k) - \delta$ összefüggést a (10) egyenletbe behelyettesítve:

$$(13) \quad \hat{c} = \frac{1}{\theta} (f'(k) - \delta - \rho)$$

A modell fenti két mozgásegyenlet felhasználásával elkészített fázisdiagramja és az $f'(k)$ görbe a 2. ábrán látható.

Az ábrán feltüntetett pályagörbék azt mutatják, hogy a mozgásegyenletek által definiált dinamikus rendszert nyeregpont-stabilitás jellemzi. A nyeregpont-stabilitást az különbözteti meg a teljes instabilitástól, hogy pontosan kettő olyan trajektória létezik, mely az egyensúlyi helyzetbe vezet. E pályagörbék, melyeket szokás stabil ágaknak is nevezni, az ábra 1.b.-vel, illetve 2.b.-vel jelöli. Az ábráról

az is kitűnik, hogy e stabil ágak egy pozitív meredekségű görbét alkotnak. Vezessük be e görbe leírására a $c = g(k)$ függvényt!

A 2. ábránábrán bemutatott pályagörbék segítségével néhány jellegzetes fogyasztói magatartás válik elkülöníthetővé. A különféle magatartásformák előfordulása a reprezentatív háztartás $t = 0$ időpontbeli vagyonától és fogyasztásától függ.

Tegyük fel, hogy $k(0) < k^*$, amennyiben $c(0)$ kicsi, azaz $c(0) < g(k(0))$ teljesül, a (k, c) pályagörbe a 2. ábrán bemutatásra kerülő 1.a. jellegű. Ezen absztinens trajektória mentén c nagysága mindaddig növekszik, míg $k < k^*$, onnan kezdve csökken, és a 2. ábrán feltüntetett méretnyíl szerint k növekedésével c csökkenése egyre gyorsul. $g(k(0)) < c(0)$ esetén a reprezentatív háztartás vagyonának és fogyasztásának alakulása az 1.c, 2.c, vagy 3. hedonista pályagörbe mentén követhető nyomon. Hogy melyiken a három közül, az szintén $c(0)$ értékétől függ. Az absztinens és hedonista magatartást reprezentáló pályagörbék határán található az egyensúlyi pont felé tartó 1.b. pályagörbe.

$k(0) > k^*$ esetén amennyiben $c(0) > g(k(0))$ teljesül, egy a 2.c. jellegű hedonista pályagörbére kerül a reprezentatív háztartás, $c(0) < g(k(0))$ esetén pedig $c(0)$ értékétől függően egy 2.a, 1.a, vagy 4. jellegű absztinens trajektóriára. A hedonista és absztinens trajektóriákat a 2.b. stabil ág választja el egymástól.

A stabil ágakon kívül elhelyezkedő pályagörbék részletes vizsgálata felveti azt a kérdést, hogy miként maximalizálhatja a reprezentatív háztartás végtelen időhorizonton értelmezett intertemporális jólétét egy olyan fogyasztási pálya, melyen fogyasztása, illetve vagyona véges időn belül nullára csökken. A válasz az, hogy sehogyan. Jóllehet, e trajektóriák kielégítik a modell (12) és (13) mozgásegyenleteit, megsértik azonban a (11) transzverzálitási feltételt. E feltétel csak a stabil ágak mentén nem sérül. Mivel pedig $c(0)$ a reprezentatív háztartás döntési változója, az intertemporális jólét maximalizálása során e háztartás $c(0)$ nagyságát a transzverzálitási feltétel figyelembe vételével választja meg, tehát egy az egyensúlyi pont felé mutató fogyasztási pályára áll. Ezek szerint amennyiben a gazdaságot valamilyen exogén hatás kitéríti egyensúlyi helyzetéből, a háztartások racionális viselkedése biztosítja az egyensúlyi helyzetbe történő visszatérést. Az elmodottakból következik, hogy az egyensúlyi helyzet stabil, a stabilitást pedig a

mozgásegyenletek mellett a transzverzálítási feltétel biztosítja. Ennek teljesülése az alábbiakat jelenti:

1. A háztartások nem biztosíthatnak önmaguk számára tartósan magasabb fogyasztást, mint amekkora a jövedelmük. Ezt fejezi ki a (3) feltétel.
2. A háztartások által felhalmozott vagyon jelenértékének végtelenben vett határértéke nem pozitív, azaz: $\lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-\int_0^t r(v) dv} \leq 0$.

A két egyenlőtlenség éppen a (11) egyenlettel ekvivalens.

A negatív fogyasztási határhajlandóság megalapozásához azonban érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor az 1. feltétel nem teljesül. Ez a helyzet ugyan nem állhat fenn tartósan, ám előfordulhat, hogy a gazdaság szereplői költségvetési korlátjuk felpuhulását érzékelve, egy időre figyelmen kívül hagyják a transzverzálítási feltételt, és az 1.c. hedonista pályagörbét választják. Ilyenkor a $\dot{k} = 0$ nyugalmi vonal eléréséig a fogyasztás a felhalmozással együtt növekszik, tehát a megtakarítási határhajlandóság pozitív, de a $\dot{k} = 0$ nyugalmi vonalat elhagyva megfordul a helyzet: a fogyasztás további növekedését a felhalmozott tőke csökkenése kíséri, azaz a megtakarítási határhajlandóság negatívvá válik. Ez a helyzet természetesen nem maradhat fenn tartósan: a tőkeállomány csökkenése előbb utóbb kikényszeríti a fogyasztás csökkentését és a megtakarítások növelését, a továbbiakban azonban ezzel az átmenetileg fennálló helyzettel foglalkozunk.

3. AZ IS-LM MODELL STABILITÁSA

Továbbra is az idő folytonos, differenciálható függvényének tekintjük a modell endogén változóit: a nemzeti jövedelmet, és a kamatlábat. Ezek mozgásegyenletei határozzák meg az IS-LM modell dinamikáját, mely szerint az $Y = Y(t)$ jövedelem a termékpiacon a túlkereslet $C(t) + I(t) + G - Y(t) = I(t) - S(t)$ kifejezéssel megadott értékére reagál, ahol $C(t)$ a fogyasztás, $I(t)$ a beruházás $S(t)$ a megtakarítás a t időpontban. A G kormányzati kiadásról feltesszük, hogy az a modell exogén paramétere. Hasonló módon az $r = r(t)$ kamatláb pedig a pénzpiaci túlkereslethez igazodik:

$$(14) \quad \dot{Y}(t) = \alpha [I(r(t)) + G - S(Y(t))]$$

$$(15) \quad \dot{r}(t) = \beta [L(Y(t), r(t)) - \frac{M}{P}]$$

Az $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ paraméterek a reakció sebességét mérik. M a nominális pénzkínálat, P az árszínvonal, így M/P az exogén konstansnak tekintett reálegyenleg. Az egyszerűség érdekében feltesszük, hogy az $I(r)$ beruházási függvény kielégíti az alábbi feltételeket:

$$(16) \quad \lim_{r \rightarrow 0} I(r) = I_{\max} > 0 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = 0 \quad I' = \frac{\partial I}{\partial r} < 0$$

$L(Y, r)$ a reálpénzkereslet, ami $Y = Y(t)$ és $r = r(t)$ révén az idő közvetett függvénye. Hicks (1937) nyomán feltesszük, hogy

$$(17) \quad \begin{aligned} L_Y = \frac{\partial L}{\partial Y} = k > 0 & \quad L_r = \frac{\partial L}{\partial r} < 0 \\ \lim_{r \rightarrow \bar{r}} L(Y, r) = \infty & \quad \lim_{r \rightarrow r_{\max}} L(Y, r) = k \cdot Y > 0 \end{aligned} ,$$

k pozitív konstans értéke mellett. Az $\dot{Y}(t) = 0$ nyugalmi vonal az IS görbe. Az ehhez húzható érintő meredeksége: $dr/dY = s/I'$, ahol $s = S'(Y)$ a fogyasztási határhajlnadóság. Az $\dot{r} = 0$ nyugalmi vonal az LM görbe. Meredeksége: $dr/dY = -L_Y/L_r \geq 0$. Megmutatható továbbá, hogy alacsony Y értékekre $I(r_1) + G - S(Y) = 0$ és $L(Y, r_2) = M/P$ esetén $r_1 > r_2$, így $s > 0$ esetén a (16) és (17) feltételek biztosítják, hogy a (14) és (15) differenciálegyenletek által meghatározott dinamikus rendszer (Y^*, r^*) fixpontja egyértelműen létezik. Ez az IS és LM görbék metszéspontjában található egyensúlyi helyzet. A stabilitásvizsgálathoz az (Y^*, r^*) egyensúlyi pont környezetében linearizáljuk a rendszert:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} Y(t) - Y^* \\ r(t) - r^* \end{pmatrix}$$

ahol \mathbf{A} a Jacobi mátrix:

$$(18) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha S'(Y^*) & \alpha I'(r^*) \\ \beta \frac{\partial L}{\partial Y}(Y^*, r^*) & \beta \frac{\partial L}{\partial r}(Y^*, r^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha s & \alpha I' \\ \beta L_Y & \beta L_r \end{bmatrix} ,$$

A megtakarítás, és pénzkereslet jövedelem szerint vett deriváltjaira az s és L_Y szimbólumokat csupán az egyszerűbb írásmód érdekében vezettük be csakúgy, mint a beruházás és pénzkereslet kamatláb szerint vett deriváltjaira az I' és L_r szimbólumokat. Bár ezekből az egyszerű jelölésekből nem tűnik ki, fontos megjegyezni, hogy ezek a nagyságok α -val és β -val ellentétben nem a modell exogén paraméterei, hanem valamennyinek az értéke az (Y^*, r^*) fixpont helyzetétől függ.

A Poincaré-Liapunov-Perron tétel szerint a rendszer stabilitását egyéb feltételek mellett a megtakarítási határhajlandóság értéke határozza meg. A Jacobi mátrix karakterisztikus egyenlete ugyanis:

$$\lambda^2 + (\alpha s - \beta L_r) \lambda - \alpha \beta (s L_r - I' L_Y) = 0,$$

melynek diszkriminánsa: $(\alpha s + \beta L_r)^2 + 4\alpha\beta I' L_Y$. Az előző szakaszban megmutattuk, hogy puha költségvetési korlát esetén s negatív és pozitív értékeket egyaránt felvehet. Mindazonáltal értéke közel esik zérushoz, csakúgy, mint a pénzkereslet kamatérzékenysége, L_r . Így a diszkrimináns első tagja alig nagyobb nullánál, míg a második határozottan negatív. A Jacobi mátrix sajátértékei ezek szerint az alábbi konjugált komplex értékek:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta L_r - \alpha s}{2} \pm \frac{\sqrt{-(\alpha s + \beta L_r)^2 - 4\alpha\beta I' L_Y}}{2} i$$

Induljunk ki az általánosan feltételezett $s > 0$ esetből! Ekkor $L_r < 0$ esetén \mathbf{A} mindkét sajátértékének valós része negatív, ami az egyensúlyi helyzet globális asszimptotikus stabilitását eredményezi. Az előző szakaszban azonban megmutattuk, hogy előfordulhat az $s < 0$ eset is. Megkeressük s azon értékeit, melyekre a stabilitás fennáll, azaz a sajátértékek valós része negatív:

$$(19) \quad s > s_0 = \frac{\beta L_r}{\alpha}$$

L_r előjelét a pénzkereslet kamatrugalmassága határozza meg. Az ennek empirikus becslésével foglalkozó irodalom óriási, itt csupán két tanulmányt emlünk: Chari, Kehoe és McGrattan (2000), valamint Mulligan és Sala-i-Martin (2000) nyomán feltesszük, hogy $L_r < 0$, ekkor $s_0 < 0$. A továbbiakban ezzel az esettel foglalkozunk.

Ezek után rögtön látszik, hogy a (19) kritérium szerint $s > 0$ a stabilitás elegendő feltétele. Dolgozatunk fő eredménye hogy a 2. szakaszban mondottak szerint puha költségvetési korlát esetén ez a feltétel nem feltétlenül teljesül, és nincs olyan mechanizmus a modellben mely a (19) stabilitási kritérium teljesülését garantálná.

Érdeemes felidézni, hogy L_r a modellnek nem exogén paramétere, nagysága az endogén változók egyensúlyi értékétől függ. Szemügyre véve a rendszer (14) és (15)

mozgásegyenleteit, az is látható, hogy az (Y^*, r^*) egyensúlyi értékek a kormányzati kiadások változásával szintén megváltoznak, azaz: $Y^* = Y^*(G)$ és $r^* = r^*(G)$. $dY^*/dG > 0$ esetén a keresletélénkítő fiskális expanzió sikeres², ám $dr^*/dG > 0$ esetén ez egyidejűleg a kamatláb emelkedésével is együtt jár, ami $dI/dr < 0$ esetén kizorítást eredményez. Ha pedig a kormányzati kiadások változása a jövedelem módosulását eredményezi, ezzel együtt módosulhat a megtakarítási határhajlandóság is, hiszen a 2. ábrán bemutatott, 1.c. típusú hedonista pályagörbék mentén a megtakarítási függvény biztosan nem lineáris. Különösen szembeötlő ez a nemlinearitás a $\dot{k} = 0$ nyugalmi vonallal való metszéspont környezetében, ahol a megtakarítási határhajlandóság előjelet is vált.

Az kaptuk tehát, hogy a megtakarítási határhajlandóság egyensúlyi értéke Y^* -tól függ, a pénzkerület kamatrugalmasságának az egyensúlyi értéke pedig r^* -tól. Így $s = s(Y^*(G))$ és $L_r = L_r(r^*(G))$. Ezek szerint G befolyásolja a (19) stabilitási kritérium teljesülését, így a kormányzati kiadás a modell alkalmas bifurkációs paramétere lehet. A következő szakaszban megmutatjuk, hogy létezik olyan G érték, melyre a rendszer fixpontja mind az unicitását, mind pedig a stabilitását elveszti.

4. SZIMULÁCIÓK

Mivel az egyéb feltételek változatlansága mellett értelmezett $s = s(G)$ és $L_r = L_r(G)$ függvények meglehetősen nehezen kezelhető formulát adnak, célszerű a puha költségvetési korlát esetére kiterjesztett IS-LM modell néhány jellegzetes dinamikai tulajdonságát számítógépes szimuláció segítségével bemutatni. Legyen a beruházási függvény a következő:

$$(20) \quad I(r) = \frac{0.01}{r + 0.05}$$

Feltesszük továbbá az egyszerűség érdekében, hogy a megtakarítási határhajlandóság puha költségvetési korlát által okozott negativitása a jövedelemnek csupán bizonyos

²A következő szakaszban a $dY^*/dG < 0$ esetre is fogunk példát mutatni.

intervallumán érvényesül, egyébként a megtakarítási határhajlandóság pozitív. Így a megtakarítási függvény:

$$S = \begin{cases} (0.2 - 0.027 \cdot [1 - \cos(2\pi(Y - 1.45))]Y - 0.005 & \text{ha } 1.45 \leq Y \leq 2.45 \\ 0.2 \cdot Y - 0.005 & \end{cases}$$

ahol a 0.027-es perturbációs paraméter számszerűsíti, hogy a puha költségvetési korlát hatása milyen mértékben érvényesül a megtakarítási függvényben. Ha ez zérus lenne, a szokásos lineáris megtakarítási függvény érvényesülne a jövedelem minden szintje mellett. A perturbációs paraméter itt alkalmazott értéke már elegendően nagy ahhoz, hogy a megtakarítási függvény elvesztítse monotonitását, ami megfelel a 2. ábrán annak az esetnek, amikor az 1.c. pályagörbe túljut a $\dot{k} = 0$ nyugalmi vonalon. Az egyszerűség érdekében a megtakarítási függvényt úgy definiáltuk, hogy az csupán az (Y_1, Y_2) intervallumon ne legyen lineáris. A megtakarítási határhajlandóság ezen az intervallumon: $s = s'(Y) = 2\pi p \sin[2\pi(Y - 1.45)]Y + 0.2 - 0.027[1 - \cos(2\pi(Y - 1.45))]$, az intervallumon kívül pedig 0.2. Következésképp a megtakarítási határhajlandóság a jövedelem folytonos függvénye.

A reálpénzkereslet:

$$L(Y, r) = 1.185 \cdot Y + \left(\frac{0.9}{r - 0.01} \right)^{0.125} - 0.08$$

Az előző szakaszban mondottaknak megfelelően L_r a kamatlábtól, és így a jövedelemtől is függ, míg L_Y konstans. Az első tag tranzakciós, az utolsó két tag pedig spekulációs pénzkeresletként is értelmezhető. A reálpénzkeresletnek ez a függvénye azonban csak $r > 0.01$ esetén értelmezett. Annak érdekében, hogy a pályagörbék az $r \leq 0.01$ koordinátájú pontokban is megjeleníthessük, feltesszük, hogy itt a pénzkereslet: $0.25 \cdot 1.185 \cdot Y/i + M/P$. Ez a kifejezés megközelítőleg folytonos pályagörbék szolgáltat. A hagyományos keynesi megközelítésnek ugyan jobban megfelelne egy jóval magasabb pénzkeresleti értéket adó kifejezés, így azonban az alacsony kamattartományban is jobban nyomon követhető pályagörbék kapunk.

A 3. ábrán $M/P = 4$ nagyságú reálpénzkínálat mellett három különböző IS görbét ábrázoltunk. Ezekhez a kormányzati kiadások három különböző szintje

tartozik. Ezek nagyságát és a hozzájuk tartozó színeket az 1. táblázat foglalja össze.

kormányzati kiadás mértéke	szín	fixpontok száma
0.11	zöld	1
0.13	piros	3
0.15	kék	1

1. táblázat: A szimulációk eredményei

A stabilitás (19) kritériuma szerint, ha az IS görbéhez a fixpontban negatív meredekségű érintő húzható, akkor a fixpont stabil. Így a $G = 0.11$ és $G = 0.15$ értékek mellett adódó fixpontok nem csak egyértelműen léteznek, hanem stabilak is. Ezért az ábra túlsúfoltságának elkerülése érdekében ezekhez az esetekhez nem ábrázoltunk pályagörbéket. A $G = 0.13$ kormányzati kiadás már érdekesebb, ezért itt néhány pályagörbét is megjelenítettünk. Mint látható, az alacsonyabb és magasabb Y értékkel jellemezhető fixpontok stabilak, míg az Y közbülső értéke mellett adódó fixpontot az instabilitás egy speciális esete, a nyeregpont stabilitás jellemzi. Szintén a túlsúfoltság elkerülése érdekében nem szerepeltetjük az ábrán a G kritikus értékeihez tartozó IS görbéket, melyeken két-két fixpont található.

Érdekes megfigyelni, hogy az instabil fixponthoz tartozó egyensúlyi kibocsátás értéke a kormányzati kiadás növelésével csökken. Figyelembe véve azonban a rendszer dinamikáját megállapítható, hogy a kereslet élénkítését célzó fiskális expanszió ilyenkor is eredményes, mert ennek hatására a rendszer egy a magasabb Y^* -hoz tartozó stabil fixpont felé tartó pályagörbére kerül.

További érdekes szituáció áll elő, ha a reálpénzkínálat $M/P = 3.51$ -es szintre csökken. Ezt az esetet mutatja be a 4. ábra. A $G = 0.15$ esetet továbbra is a kék színű IS görbe reprezentálja, az ekkor adódó egyetlen fixpont stabil. $G = 0.18$ esetén is csupán egyetlen fixpont adódik, ám ez instabil, és a modellben határciklus jelenik meg.

5. KÖVETKEZTETÉSEK, A MODELL KORLÁTAI ÉS TOVÁBBI KUTATÁSI IRÁNYOK

Feltételezve a költségvetési korlát puhaságát megmutattuk, hogy a megtakarítási határhajlandóság negatív értéket is felvehet. Ebben az esetben

azonban az IS és LM görbék által meghatározott egyensúlyi helyzet unicitása és stabilitása számos tényező függvényévé válik. Dolgozatunkban ezek közül a kormányzati kiadásokra összpontosítottunk, de az IS és LM görbék helyzetét meghatározó paraméterek közül bármelyik az elemzés középpontjába álltható: pl. a reálpénzkiálat, a megtakarítási határhajlandóság (Y_1, Y_2) intervallumon kívüli értéke, vagy a pénzkereslet kamatrugalmassága. Minden bizonnyal érdemes lenne az elemzést ezen nagyságokkal kapcsolatban is elvégezni. A negatív megtakarítási határhajlandóság bevezetésének egy másik fontos következménye, hogy ez önmagában elegendő a határciklus létrejöttéhez anélkül, hogy Fanti és Manfredi (2007), Neamtu-Opris és Chilarescu (2007), vagy Zhou és Li (2008) bevezetőben említett eljárását követve késleltetett differenciálegyenletekkel íránk le az adóbevételek beszedésének, vagy a beruházási kiadások alakulásának dinamikáját.

Úgy vélem, hogy a magyar gazdaság mindmáig nem mentes a puha költségvetési korlát bizonyos ismérveitől. Valószínűleg mind a mai napig érvényes Kornai (2000) cikkének megállapítása, mely szerint a költségvetési korlát puhításában a fő szerepet a puha adóztatás és a puha hitelezés játssza. Emiatt érdemes lenne a puha költségvetési korlát által sérülő transzverzálitási feltételt a DSGE modellekbe is beépíteni. Valószínű, hogy már Bénassy (2007) egyszerű modelljének ilyen módosítása is érdekes következtetésekre vezetne, és minden bizonnyal megváltoznának egy komplexebb modell viselkedési tulajdonságai is.

További érdekes kérdés lenne annak tisztázása, hogy mennyibe változik a modell dinamikája, ha a kibocsátás és kamatláb változása nem egyenes arányban igazodik a termék-, illetve pénzpiacon mutatkozó túlkereslethez. Ennek a kérdésnek a vizsgálata szükségessé tenné a (14) és (15) differenciálegyenletekben az arányossági tényezők olyan szigorúan monoton növekvő, nemlineáris függvényekkel történő helyettesítését, melyeknek az origóban zéróhelye van.

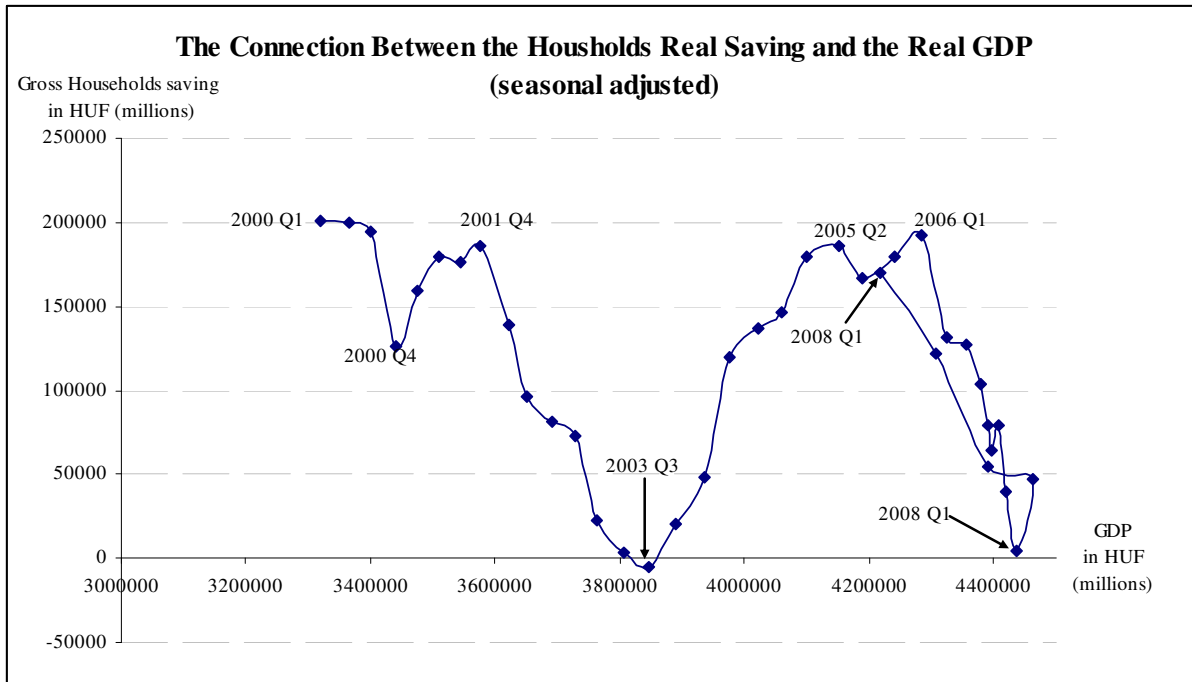
Végül rá kell mutatni a jelen cikkben bemutatott modell egy fontos hiányosságára. A háztartások, illetve vállalatok várakozásaiban végbenemző hirtelen változások éppúgy az IS és LM görbék elmozdulását eredményezhetik, mint a monetáris és fiskális beavatkozások. Mindezek miatt az IS és LM görbék állandó mozgásban vannak, lehetlenné téve a modell hosszabb távú előrejelzés

céljára történő alkalmazását. Megfelelő sztochasztikus változók beiktatásával például a beruházási, a megtakarítási, vagy a pénzkeresleti függvényekbe ezek a sokkok ugyan figyelembe vehetők, maga az IS-LM modell azonban alkalmatlan a technológiai sokkok megragadására. A termelési technológiában végbemenő változások legfeljebb Ramsey 2. szakaszban ismertetett modelljébe építhetők be. Megmutatható például, hogy egy pozitív technológiai sokk hatására a negatív megtakarítási határhajlandóság előjelet válthat. A kutatás első lépéseinek azonban alkalmas keretét alkotják a determinisztikus modellek.

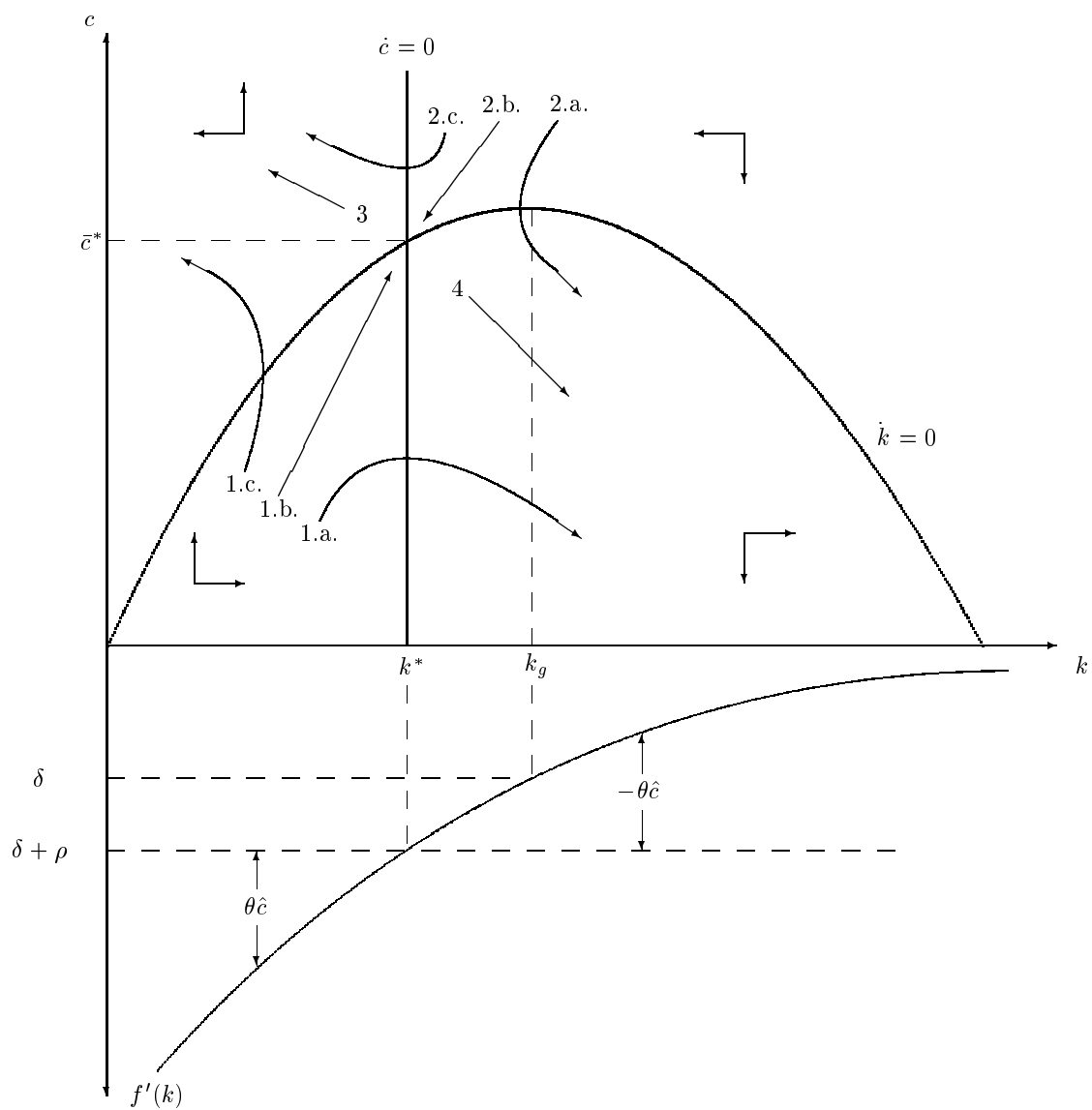
HIVATKOZÁSOK

- [1] Bénassy, J. P. (2007) IS-LM and the multiplier: A dynamic general equilibrium model. *Economic Letters* 96, 189-195.
- [2] Chari, V. V., P. J. Kehoe, and E. R. McGrattan, (2000) Sticky Price Models of the Business Cycle: Can the Contract Multiplier Solve the Persistence Problem? *Econometrica*, 68(5), Sept. 2000, 1151-1179.
- [3] Fanti, M. and Manfredi, P. (2007) Chaotic business cycles and fiscal policy: An IS-LM model with distributed tax collection lags, *Chaos, Solutions and Fractals*, 32, 736-744.
- [4] Hicks, J. R. (1937) Mr. Keynes and the 'Classics': A Suggested Interpretation, *Econometrica* 5, 147-159. Reprinted in: Fellner W. and B.F. Haley (eds.), 1950, *Readings in the Theory of Income Distribution*, 461-476; Hicks, J. R., 1967, *Critical Essays in Monetary Theory*, London, Oxford University Press, 126-142.
- [5] Kornai, J. (1979) A hiány. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- [6] Kornai, J. (1997) Pénzügyi fegyelem és puha költségvetési korlát, *Közgazdasági Szemle*, 44, pp. 940-953.
- [7] Kornai, J. (2000) A költségvetési korlát megkeményítése a poszt szocialista országokban, *Közgazdasági Szemle*, 47, pp. 1-22.
- [8] Lucas Jr, R. E. (1972) Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory* 4, 103-124.
- [9] Kydland, F. E. és Prescott, E. (1982) Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica* 50, 1345-1370.
- [10] McCallum, B. T. és Nelson, E. (1999) An optimizing IS-LM specification for monetary policy and business cycle analysis. *Journal of Money, Credit and Banking* 31, 296-316.
- [11] Muellbauer, J. and Portes, R. (1978) Macroeconomic Models with Quantity Rationing, *Economic Journal*, 88, 788-821.
- [12] Mulligan, C. B. and X. Sala-i-Martin, Extensive Margins and the Demand for Money at Low Interest Rates, *Journal of Political Economy*, 108(5), Oct. 2000, 961-991.

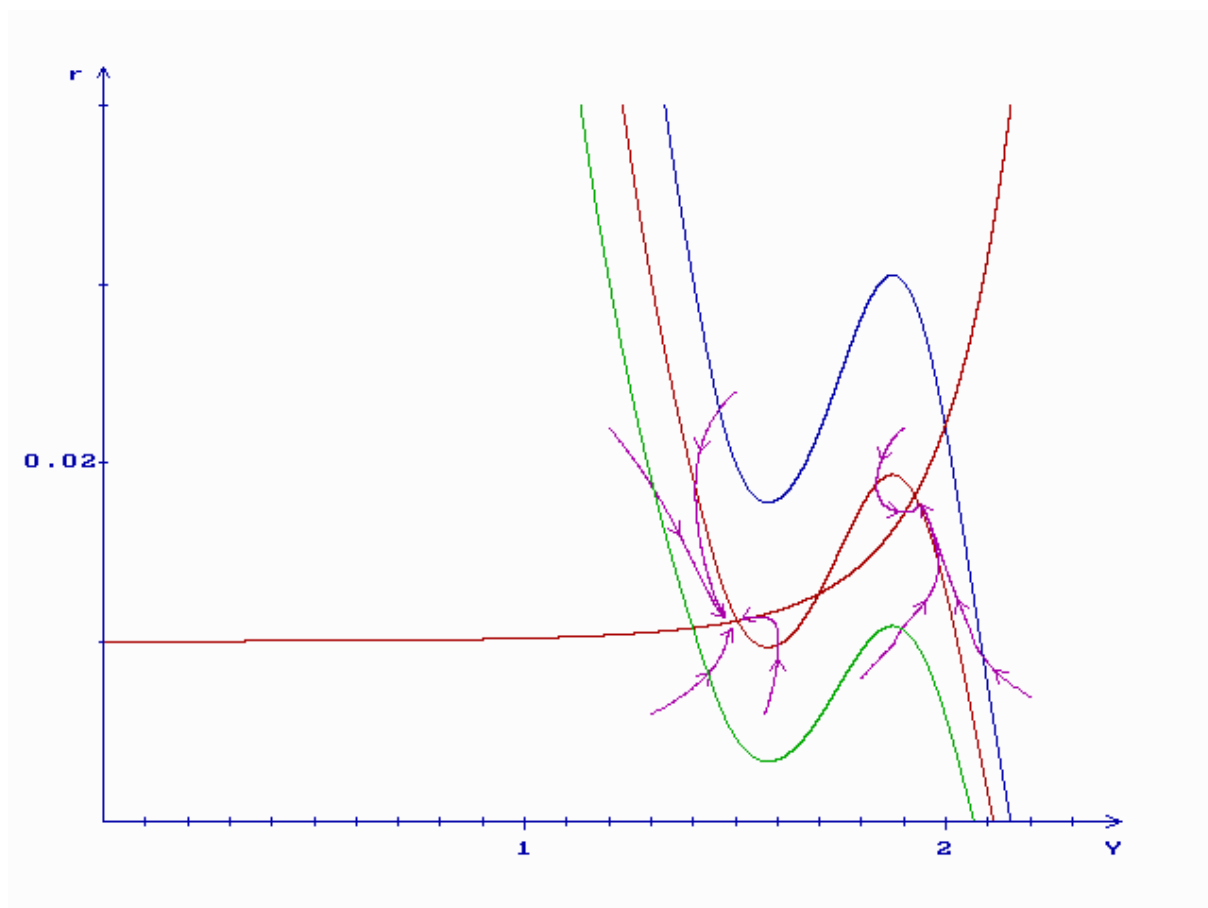
- [13] Neamtu, M., Opris, D., and Chilarescu, C. (2007) Hopf bifurcation in a dynamic IS/LM model with time delay, *Chaos, Solutions and Fractals*, 34, 519-530.
- [14] Tobin, J. (1958) Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk, *Review of Economic Studies*, 25, 65-86.
- [15] Zhou, L. and Li, Y. (2008) A generalized dynamics IS-LM model with delayed time in investment processes, *Applied Mathematics and Computation*, 196, 774-781.



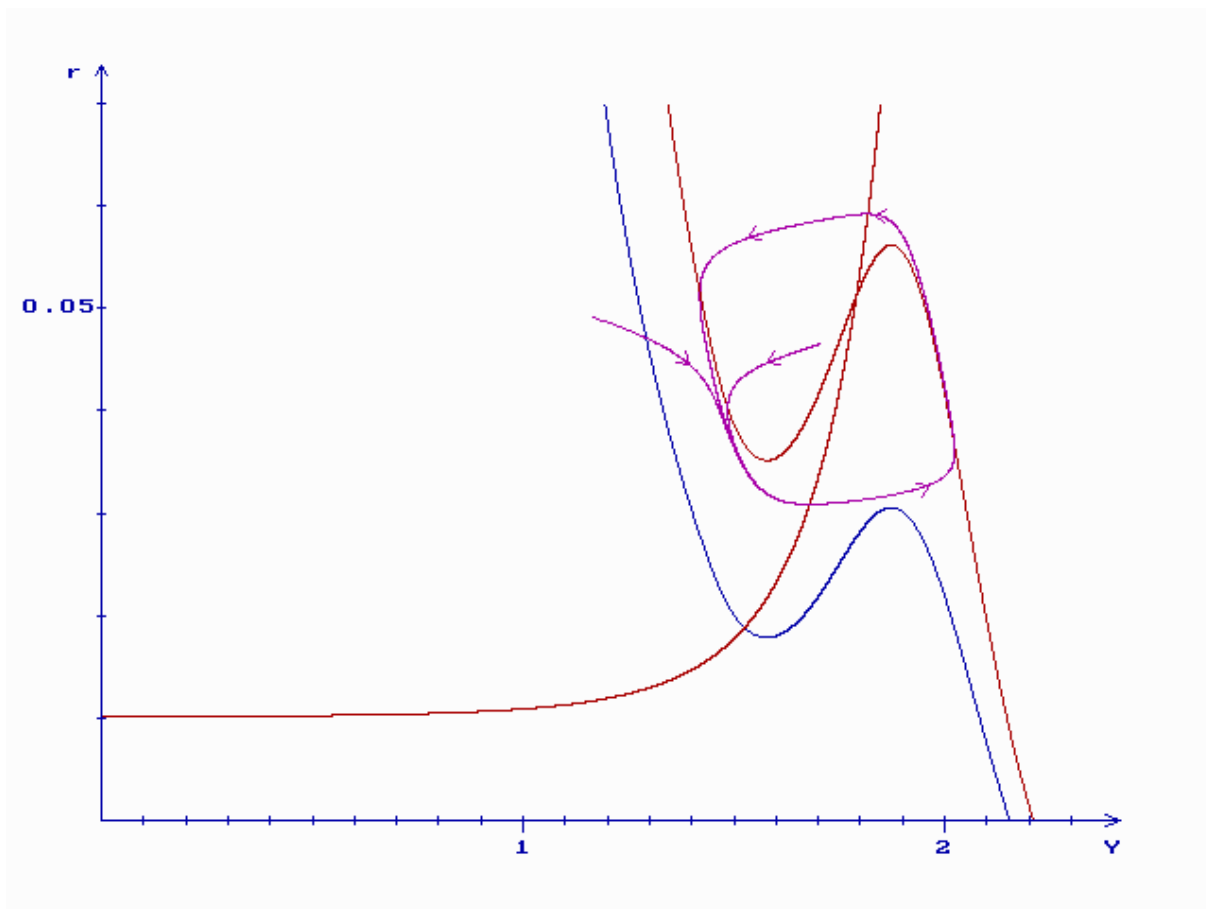
1. ábra



ÁBRA 2. A Ramsey-modell fázisdiagramja



3. ábra



4. ábra